# 中山大学 2007 级硕士研究生<<泛函分析>>考试题

Pure Math --- C.C.Chang

To Professor Huang, from whom I learned that math is humourous

E-mail: zhangzujin360732@163.com

1. 紧空间中闭集是紧的;Hausdorff 空间中紧集是闭的.

证明

◆ 设 $X$ 是紧空间,$F\subset X$ 是闭集,则对 $F$ 的任一开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ ,有

$$X\subset\left(\bigcup\nolimits_{\alpha\in J}U_\alpha\right)\bigcup F^c$$

从而

$$\exists\{\alpha_k\}_{k=1}^n\subset J, s.t. X\subset\left(\bigcup\nolimits_{i=1}^n U_{\alpha_i}\right)\bigcup F^c$$

于是

$$F\subset\bigcup\nolimits_{i=1}^n U_{\alpha_i}$$

$F$ 是紧的.

◆ 设 $X$ 是 Hausdorff 空间,$K\subset X$ 是紧集,则对 $\forall x\in X\setminus K$ ,

$$\forall y\in K,\exists x\text{领域}\,U_{x,y}, y\text{领域}\,U_{y,x}, s.t. U_{x,y}\bigcap U_{y,x}=\varnothing$$

而由 $K\subset\left\{U_{y,x}\right\}_{y\in K}$ 知

$$\exists\{y_k\}_{k=1}^n\subset K, s.t. K\subset\bigcup\nolimits_{k=1}^n U_{y_k,x}$$

从而 $x$ 有领域 $\bigcap\nolimits_{k=1}^n U_{x,y_k}\subset K^c$ ,而 $K^c$ 是开的,$K$ 是闭的.这是因为

$$\begin{aligned}\left(\bigcap\nolimits_{k=1}^n U_{x,y_k}\right)\bigcap K&\subset\left(\bigcap\nolimits_{k=1}^n U_{x,y_k}\right)\bigcap\left(\bigcup\nolimits_{k=1}^n U_{y_k,x}\right)\\&\subset\bigcup\nolimits_{k=1}^n\left(U_{x,y_k}\bigcap U_{y_k,x}\right)=\varnothing\end{aligned}$$ ■

2. 设 $(X,d)$ 是完备度量空间,$\{F_n\}$ 是其中一列无内点之闭集,则 $\bigcup\nolimits_{n=1}^\infty F_n$ 亦无内点..

证明 对 $\forall x\in X,\forall N_{x,\varepsilon}=\{y\in X; d(y,x)\le\varepsilon\}$ ,我们证明

$$N_{x,\varepsilon} \bigcap \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right)^c \neq \varnothing$$

而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 无内点.

对 $N_{x,\varepsilon}$ ,由 $F_1^o = \varnothing$ 知,$\exists x_1 \in N_{x,\varepsilon}, s.t. x_1 \notin F_1$ ,又 $F_1$ 是闭的,

$$\exists x_1 领域 N_{x_1,\varepsilon_1}, s.t. N_{x_1,\varepsilon_1} \subset N_{x,\varepsilon}, \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}, N_{x_1,\varepsilon_1} \bigcap F_1 = \varnothing$$

对 $N_{x_1,\varepsilon_1}$ ,由 $F_2^c = \varnothing$ 知,$\exists x_2 \in N_{x_1,\varepsilon_1}, s.t. x_2 \notin F_2$ ,同样,$F_2$ 是闭的,

$$\exists x_2 领域 N_{x_2,\varepsilon_2}, s.t. N_{x_2,\varepsilon_2} \subset N_{x_1,\varepsilon_1}, \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon}{2^2}, N_{x_2,\varepsilon_2} \bigcap F_2 = \varnothing$$

如此一直做下去,得到

$$\{x_n\}, x_n 领域 N_{x_n,\varepsilon_n}, s.t. \{N_{x_n,\varepsilon_n}\} 递减, N_{x_n,\varepsilon_n} \bigcap F_n = \varnothing, x_n \notin F_n, \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

由上构造,$\{x_n\}$ 为 Cauchy 列,设收敛于 $x_\infty \in X$ ,则

$$x_\infty \in N_{x_n,\varepsilon_n}, x_\infty \notin F_n, \forall n \in Z_+ \quad ■$$

3. 设 $X$ 是 Banach 空间,$M \subset X$ 是线性子空间,则 $M$ 强闭等价于 $M$ 弱闭.

证明

◆ $M$ 强闭推出 $M$ 弱闭

设 $M$ 强闭,$x_n \in M$ 而 $x_n \xrightarrow{\omega} x_\infty$ .若 $x_\infty \notin M$ ,则由 Hahn-Banach 定理,

$$\exists \xi \in X^*, s.t. \langle M, \xi \rangle = 0, \langle x_\infty, \xi \rangle = dist(x_\infty, M) > 0$$

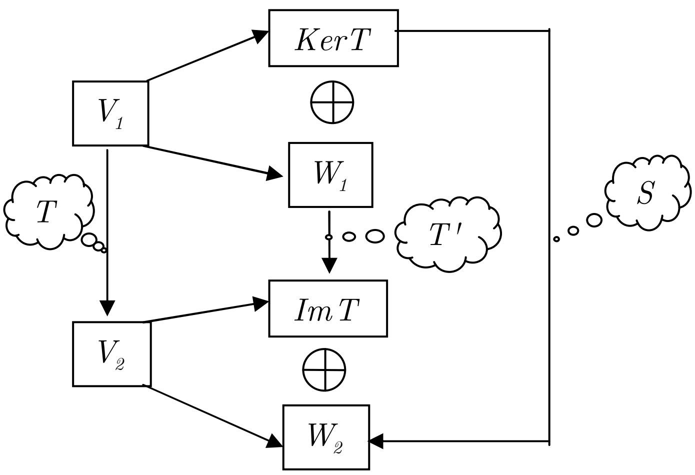
这与 $x_n \xrightarrow{\omega} x_\infty$ 矛盾,而有 $x_\infty \in M$ ,$M$ 弱闭.

◆ $M$ 弱闭推出 $M$ 强闭

设 $M$ 弱闭,$x_n \in M, x_n \to x_\infty$ ,则 $x_n \xrightarrow{\omega} x$ ,而 $x \in M$ ,$M$ 强闭. ■

4. 设 $V_i, i = 1,2$ 是线性空间,$T : V_1 \to V_2$ 是线性映射,且 $indT = 0$ ,则存在 $S : V_1 \to V_2$ 使得 $\dim Im S < \infty$ 且 $T + S : V_1 \to V_2$ 是双射.

证明




如图,构造直和分解 $V_1 = KerT \oplus W_1$ , $V_2 = Im T \oplus W_2$ ,则 $T : V_1 \to V_2$ 诱导出 $T' : W_1 \to Im T$ 为双射,而又

$$0 = indT$$

$$= \dim KerT - \dim W_2$$

存在 $S : KerT \to W_2$ 双射.于是

$$T + S : V_1 \to V_2$$

为双射,且 $\dim Im S = \dim W_2 = \dim Co\ker T < \infty$ . ■

5. 设 $V$ 是线性空间,$V_i, i = 1,2$ 为其线性子空间,则下列条件等价:

1) $V = V_1 \oplus V_2$;

2) 存在投射 $P$ 使得 $V_1 = PV, V_2 = (I-P)V$;

3) 商映射 $q_1 : V_2 \to V / V_1, q_2 : V_1 \to V / V_2$ 均为双射.

证明 1)⇒2) 由 $\forall x \in V, \exists | x_i \in V_i, s.t. x = x_1 + x_2$ 知映射

$$P : V \to V_1$$
$$P(x) = x_1$$

是线性的,且 $P^2 = P$,即 $P$ 为投射,于是 $PV = V_1$,$(I-P)V = V_2$.

2)⇒1) 由 $V_1 = PV, V_2 = (I-P)V$,我们有

$$\forall x \in V, x = Px + (I-P)x \in V_1 + V_2$$

又若 $x \in V_1 \bigcap V_2$,则 $x = Py_1 = (I-P)y_2$,从而

$$Px = P^2 y = Py = x = (I-P)y = (I-P)^2 y = (I-P)x$$

于是 $x = 0$.结论 $V = V_1 \oplus V_2$ 成立.

1)⇒3) 对 $\forall [x]_1 \in V / V_1$,由直和分解

$$\exists | x_i \in V_i, s.t. x = x_1 + x_2$$

而 $q_1(x_2) = [x_2]_1 = [x]_1$; $q_2(x_1) = [x_1]_2 = [x]_2$ 是单满的.

3)⇒1) 对 $\forall x \in V$,由 $q_1 : V_2 \to V / V_1$ 是双射知

$$\exists | x_2 \in V_2, s.t. [x_2]_1 = [x]_1, \text{即} x - x_2 \in V_1$$

即有 $V = V_1 \oplus V_2$. ■

6. 设 $H_1, H_2$ 为 Hilbert 空间,$T : H_1 \to H_2$ 稠定且是闭的,则 $\left\| T\left(I_1 + T^* T\right)^{-1} \right\| \le 1$.

证明 由于 $T$ 是闭的,其图像 $G_T$ 于 $H_1 \oplus H_2$ 中是闭的,而有正交补 $G_T^\perp$.若 $(x_1, x_2) \in G_T^\perp$,则

$$(x, x_1) + (Tx, x_2) = 0, \forall x \in D_T$$

即

$$x_2 \in D_{T^*}, x_1 = -T^* x_2$$

现对 $\forall (\xi, \eta) \in H_1 \oplus H_2$,

$$\exists | (x, Tx) \in G_T, \left(-T^* y, y\right) \in G_T^\perp, s.t. (\xi, \eta) = (x, Tx) + \left(-T^* y, y\right)$$

即

$$\begin{cases} \xi = x - T^* y, \\ \eta = Tx + y. \end{cases}$$

令 $\eta = 0$,有

$$\xi = \left(I_1 + T^* T\right)x$$

从而 $I_1 + T^* T : H_1 \to H_1$ 是满的.

如今,对上式两边用 $x$ 作内积,有

$$(x, x) + (Tx, Tx) = (x, x) + \left(T^* Tx, x\right) = \left(\left(I_1 + T^* T\right)x, x\right) = (\xi, x) \le \|\xi\| \cdot \|x\|$$

◆ $\|x\|^2 \le \|\xi\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \le \|\xi\|$,而 $I_1 + T^* T$ 是单射,而 $\left(I_1 + T^* T\right)^{-1}$ 存在,且范

数小于等于 1.

◆ $\|Tx\|^2 \le \|x\|\cdot\|\xi\| \le \|\xi\|^2 \Rightarrow \|Tx\| \le \|\xi\|$,而$\left\|T\left(I_1+T^*T\right)^{-1}\right\| \le 1$. ■

7. 设$B$为 Banach 空间.算子$S:B\to B$称为拟紧的,如果

$$\exists m\in Z_+, s.t. \|S^m-K\|<1$$

其中$K:B\to B$是紧算子.证明:若$T:B\to B$是 Fredholm 算子,则

$$ind(T+S^n)=indT$$

对充分大的$n$成立.

**证明** 对$r\in Z_+$,有$(S^m-K)^r=S^{mr}+P(S,K)$,其中$P(S,K)$是关于$S,K$的多项式,且其每项均有$K$的大于 0 的次幂[和二项展开一样,但这因为是算子,不可交换,只能如此做].从而$P(S,K):B_1\to B_2$紧,

现取充分大的$r$,使

$$\|(S^m-K)^r\| \le \|S^m-K\|^r$$

充分小而

$$T+(S^m-K)^r$$

仍为 Fredholm 算子,且

$$ind\left(T+(S^m-K)^r\right)=indT$$

于是

$$\begin{aligned}
&ind(T+S^{mr})\\
&=ind\left(T+(S^m-K)^r-P(S,K)\right)\\
&=ind\left(T+(S^m-K)^r\right)[\text{紧扰动}]\\
&=indT[\text{无穷小扰动}]
\end{aligned}$$ ■