

# 空域中基于 ROF 模型的小波图像修补方法

## ROF Model-based Method For Wavelet Image Inpainting in Pixel Domain

周光华, 冯象初

(西安电子科技大学理学院, 陕西 西安 710071)

Guanghua Zhou, Xiangchu Feng

(College of Mathematics, Xidian University, Xi'an, Shanxi 710071, China)

**摘要** 图像修补问题是图像处理领域的重要内容之一, 本文简要介绍了图像修补问题及现在一些主要的图像修补技术。根据图像修补的目的, 提出小波图像修补问题不必局限于小波域求解, 也可以在空域得到解决的思想。文中给出了该思想的具体实现依据和步骤, 并提出一种在空域中基于 ROF(Rudin-Osher-Fatemi)模型来实现上述思想的小波图像修补方法。图像修补仿真实验的结果表明, 本文提出的方法可以得到较好的图像修补视觉效果, 峰值信噪比(Peak signal to noise ratio, PSNR)小于 10dB 的缺损图像经处理后其 PSNR 达到约 30dB, 较以前的小波图像修补方法, 该算法更加显著地提高缺损图像的 PSNR。因而, 本文在空域实现了小波图像修补, 本文提出的思想是可行的。

**关键词** 图像处理; 图像修补; ROF 模型; 小波

**中图分类号:** TP319    **文献标识码:** A    **OCIS 编码:** 100.2000; 100.2980; 100.3190

**Abstract** Image inpainting is one of the most important problems in image processing. Image inpainting and some of its main techniques are presented in this paper briefly. According to the target of image inpainting, an idea to solve wavelet image inpainting not only in wavelet domain but also in pixel domain and its reason and steps to be implemented are given. A wavelet image inpainting method in pixel domain based on ROF (Rudin-Osher-Fatemi) model is proposed to put the above idea into practice. Experiments showed that the method could get good visual effect of image inpainting, with higher PSNR compared with former methods — PSNR of damaged image increased from less than 10dB to 30dB after processing using our proposed method. Therefore, wavelet image inpainting is achieved in pixel domain, which means that our proposed thought is practicable.

**Keywords** image processing; image inpainting; Rudin-Osher-Fatemi model; wavelet

## 1 引言

图像修补技术是数字图像处理<sup>[1-2]</sup>领域的重要内容之一, 利用缺损图像的残留信息对丢失或者受损部分进行填充或修正, 达到复原图像以满足人眼视觉要求的目的。

自 Bertalmio 等把图像修补技术引入到图像处理中<sup>[3]</sup>, 提出 BSCB 模型, 目前为止无论修补效果方面, 还是修补实现速度方面, 图像修补技术得到很大发展, 图像修补技术日益成熟。BSCB 模型采用了物理学中热扩散的思想。Chan 等提出了曲率驱动扩散模型(Curvature-Driven Diffusion, CDD)<sup>[4]</sup>。以上两种模型都是基于偏微分方程(PDE)的修补方法, 此类基于变分<sup>[5]</sup>PDE 的方法还有 TV(total variation)模型<sup>[6]</sup>、Euler's elastica 模型<sup>[7]</sup>和 Mumford-Shah 模型<sup>[8]</sup>和

**基金项目:** 国家自然科学基金(NSFC 60872138)资助项目。

**作者简介:** 周光华(1985---), 男, 硕士, 主要从事图像处理方面的研究。Email: picassolone@yahoo.com.cn

**导师简介:** 冯象初(1962---), 男, 博士, 教授, 主要从事小波分析、尺度空间、微分方程数值解和图像处理方面的研究。Email: xcfeng@mail.xidian.edu.cn

Mumford-Shah-Euler 模型<sup>[9]</sup>等。另外，借助理合成算法来填补被修补区域，可以修补图像中大块丢失信息<sup>[10]</sup>。

小波变换具有时频域表征信号局部特征和多分辨率分析的特点，是一种新的信号和图像分析工具。随着小波理论日趋成熟<sup>[11]</sup>，它被广泛应用在图像处理领域诸如图像压缩<sup>[12]</sup>、图像去噪<sup>[13]</sup>、图像增强<sup>[14]</sup>等等。

用小波进行图像处理过程中，由于各种因素丢失部分小波系数，造成了重构时得到缺损图像。Chan等在[15]中提出小波域图像修补问题。Zhou和Chan在[16]中提出基于非局部全变分的小波域图像修补方法。相比于空域的图像修补，小波域图像修补技术更加复杂而且进展缓慢。

在分析了多种图像修补技术后，本文认为，图像修补的目的是对缺损图像修补以达到各种要求。小波图像修补也是图像修补的一种，因此本文提出，由丢失小波系数造成的图像修补问题不必局限于在小波域进行，且因为空域图像修补技术相对更加成熟，有更多技术可以利用来解决小波域图像修补问题。

本文第二部分给出了空域中解决小波图像修补问题的实现依据，并提出基于 ROF 模型的实现以上思想的修补算法；第三部分是用本文方法进行修补实验的结果和分析；最后总结并指出一些进一步研究。

## 2 空域完成小波图像修补的实现依据及其算法

一般地，小波图像修补是要使得小波域图像能量泛函取得极小值，求得极小化泛函的解，得到残缺处的小波系数，从而完成修补的过程。以基于 TV 的小波图像修补技术<sup>[15]</sup>为例，其基本原理如下：

设标准的图像模型为  $z(x) = u_0(x) + n(x)$ ，其中  $u_0(x)$  是原始无噪声图像， $n(x)$  为高斯白噪声。设图像尺寸大小为  $n \times m$ ， $z(x)$  的标准小波变换表示如下：
$$z(\alpha, x) = \sum_{j,k} \alpha_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad j \in Z, k \in Z^2.$$

小波域的数据缺损，亦即部分系数  $\{\alpha_{j,k}\}$  丢失，导致图像部分信息丢失，小波图像修补的目的就是恢复这些丢失的小波系数。

对没有噪声或者噪声大小可忽略的图像，只要填充缺失小波系数并保持其他系数即可。利用 TV 极小化方法来填充小波系数的模型为：

$$\min_{\beta_{j,k}:(j,k) \in I} F(u, z) = \sum_{R^2} |\nabla_x u(\beta, x)| dx = TV(u(\beta, x)) \quad (1)$$

其中  $u(\beta, x)$  有小波变换：
$$u(\beta, x) = \sum_{j,k} \beta_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad \beta = (\beta_{j,k}), \quad j \in Z, k \in Z^2,$$
 并使得  $\beta_{j,k} = \alpha_{j,k}$ ,

$(j,k) \notin I$ , 其中  $I = \{(j,k) | \alpha_{j,k} \text{ 为缺失的小波系数}\}$ 。模型所对应 Euler-Lagrange 方程为:

$$-\int_{R^2} \nabla \cdot \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] \psi_{j,k} dx = 0 \quad (2)$$

因为在数据处理或传输等过程中, 数据中产生噪声是不可避免的,  $\{\beta_{j,k}, (j,k) \in I\}$  可能完全丢失, 其余的系数  $\{\beta_{j,k}, (j,k) \notin I\}$  可能也会被噪声破坏, 这种情况下的的小波修补模型为:

$$\min_{\beta_{j,k}} F(u, z) = \int_{R^2} |\nabla_x u(\beta, x)| dx + \sum_{(j,k)} \lambda_{j,k} (\beta_{j,k} - \alpha_{j,k}) \quad (3)$$

其中当  $(j,k) \in I$  时, 参数  $\lambda_{(j,k)} = 0$ 。模型对应 Euler-Lagrange 方程如下:

$$-\int_{R^2} \nabla \cdot \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] \psi_{j,k} dx + 2\lambda_{j,k} (\beta_{j,k} - \alpha_{j,k}) = 0 \quad (4)$$

修补过程自始至终都是用小波域的小波系数的形式来表示的, 事实上, 整个修补过程完全可以用空域图像的形式来表示和完成: 用剩余小波系数重构得到空域待修补缺损图像; 为达到使得上述小波图像修补过程中的能量泛函取得极小, 修补或增强空域缺损图像得到新的图像; 一般小波图像修补过程修补完成后, 系数重构得到的图像也就是现在得到的新的图像, 对这幅图像做小波分解, 得到的系数也就是上述小波修补的结果 (如图 1 所示)。

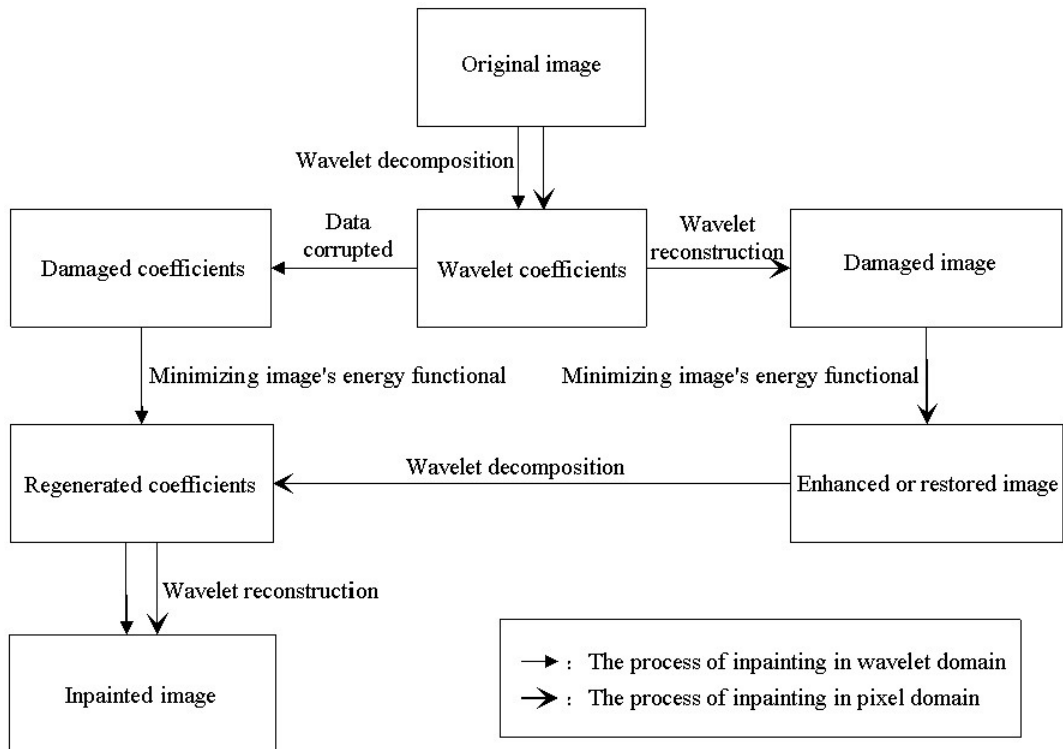


图 1 小波域与空域图像修补过程

Fig. 1 The image inpainting process in wavelet and pixel domain

用 Daubechies 7 双正交小波分解图 2，其中边界处用对称延拓，然后随机去掉 50%小波系数，用剩余系数重构得到图 3。只要把图 4 作为小波图像修补问题的空域中待修补图像，在空域修补或者增强图 3 得到接近原图的图像，小波域的系数也会得以修补。由于图 3 的许多特征都类似带噪声图像，因而选用 ROF 模型对其进行处理，迭代 10 次后的结果如图 4，在一定程度上修复了图 3，以下本文在完成空域中解决小波图像修补过程中的图像修复时，选用 ROF 模型。

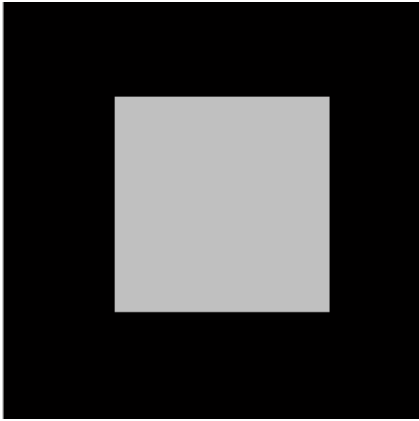


图 2 原始图像  
Fig. 2 Original image

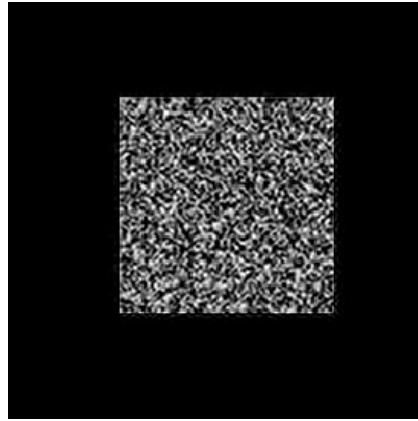


图 3 缺损图像  
Fig. 3 Damaged image

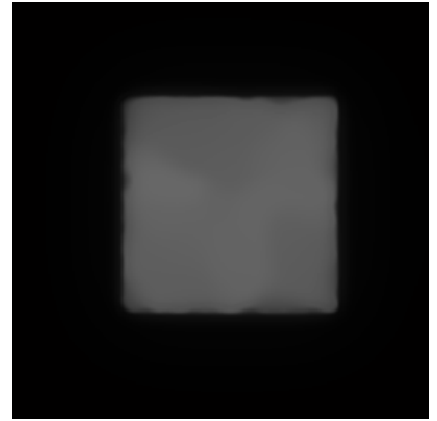


图 4 经 ROF 模型处理后  
Fig. 4 Processed by ROF

在图像处理中 ROF 模型有着广泛的应用，ROF 模型<sup>[17]</sup>在图像去噪的同时能够保持图像边缘特征，模型的能量方程如下：

$$E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \lambda \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy, \quad (5)$$

其中， $u(x, y)$  是干净图像， $u_0 : \Omega \rightarrow R$  为含噪声图像， $\Omega$  是  $R^2$  上的有界开子集，代表了图像区域， $\lambda$  为拉格朗日乘子。

通过变分方法可得 ROF 模型的 Euler-Lagrange 方程如下：

$$\frac{\partial u}{\partial t} (\text{或 } 0) = \nabla \cdot \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] + \lambda (u - u^0), \quad (6)$$

其中  $\nabla \cdot \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right]$  是扩散项， $\frac{1}{|\nabla u|}$  是扩散系数。

基于 ROF 模型的空域求解小波图像修补问题的算法流程如图 4。实现该算法的基本步骤如下：

- 初始化，输入有缺损的一组已知小波系数  $\nu$ ；
- 第 1 步，用已知小波系数  $\nu$  做逆小波变换，得到图像  $u_0$ ；
- 第 2 步，如果图像  $u_0$  的效果满足要求，转到第 5 步；

否则用 ROF 模型对图像  $u_0$  进行修正，得到图像  $u$ ；

第 3 步，对  $u$  进行小波分解，得到新的小波系数  $\hat{\nu}$ ；

第 4 步，用  $\hat{\nu}$  中部分小波系数补全  $\nu$  中缺失部分，然后用补全后的小波系数替代  $\nu$ ，转到第 1 步；

第 5 步，输出图像  $u$  或者其小波系数  $\nu$ ；

结束。

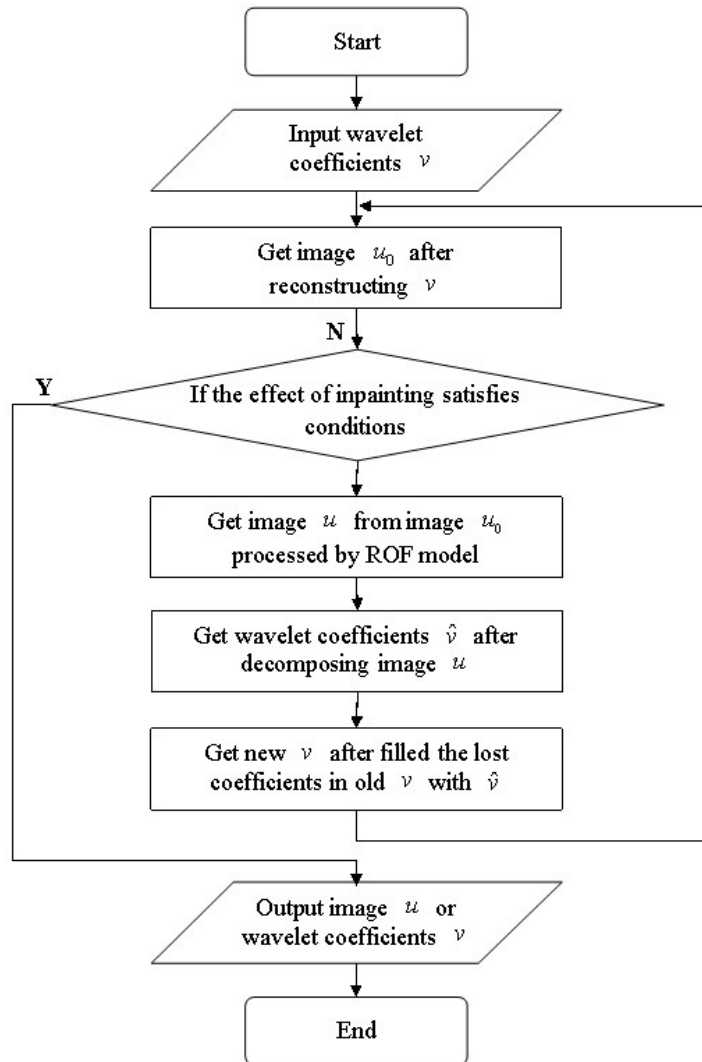


图 5. 本文修补算法流程图

Fig. 5 The flowchart of image inpainting algorithm in the paper.

### 3 实验结果与分析

为验证本文第二部分提出的图像修补方法，以及证明空域求解小波修补问题思想的可行性，这一部分进行了三组图像修补实验。每组实验首先对原图像用 Daubechies 7-9 双正交小波进行小波分解，边界处用对称延拓，然后随机去掉 50%小波系数，得到实验中所用的小波系数  $\nu$ ，然后重构得到空域图像  $u$ 。

实验中通过计算图像的标准峰值信噪比(Peak Signal to Noise Ratio, PSNR)来评估小波图像修补的效果:

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{255^2}{\|u - u_0\|_2} \right) (dB) \quad (7)$$

其中  $u_0$  是原始图像,  $u$  是修补处理后的图像,  $\|\cdot\|_2$  是标准  $L^2$  范数。PSNR 越大时, 修补效果越好。

实验 I 是对包含一些简单图形的图像的修补实验。缺损图像(图 6.b)的 PSNR 为 10.6dB, 经本文算法修补后, PSNR 达到 31.4dB。而且实验结果如图 6.c 显示, 修补的效果满足人类视觉学的“连接性准则”, 修补效果较好。实验 II 和 III 是对图像 Lena 和图像 cameraman 进行修补实验。图像缺损后的 PSNR 分别为 11.5dB(如图 7.b)和 9.9dB(如图 8.b), 经过本文算法修补后, 分别达到 29.3dB(如图 7.c)和 28.5dB(如图 8.c)。缺损图像中所丢失的绝大部分的数据都得到了恢复, 结构部分可以较好的保持, 纹理部分的修补效果不够好, 这是 ROF 模型本身的缺陷。

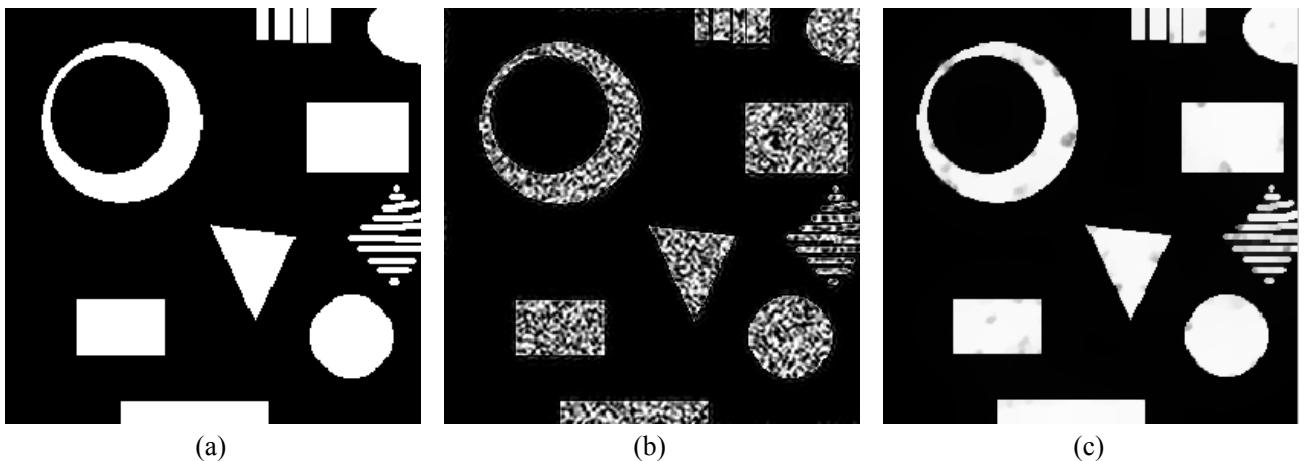


图 6 图像修补实验 I。(a) 原始图像; (b) 缺损图像; (c) 处理结果

Fig. 6 Image inpainting experiment I. (a) Original image; (b) Damaged image; (c) Result using our algorithm

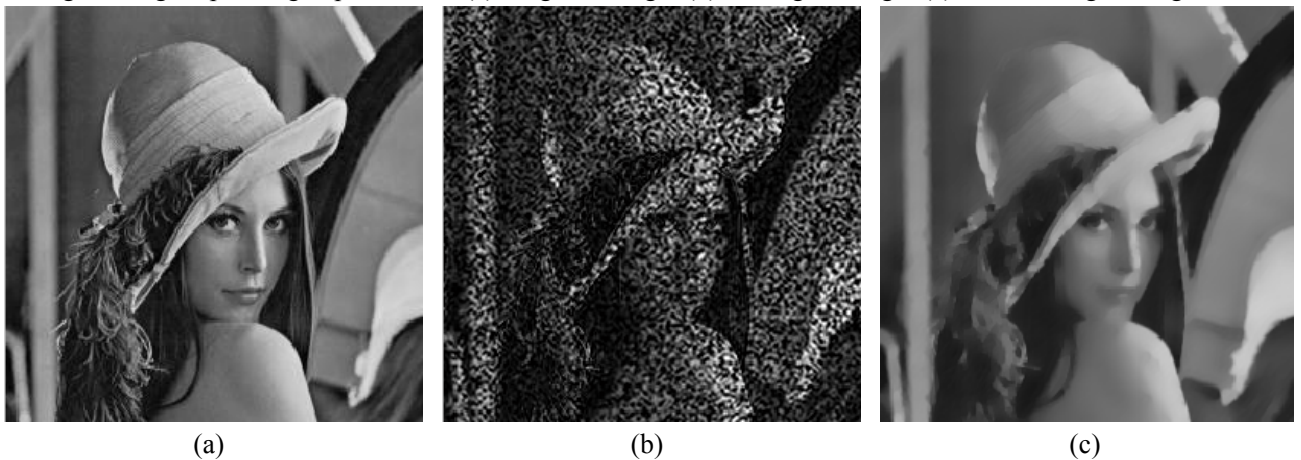


图 7 图像修补实验 II。(a) 原始图像; (b) 缺损图像; (c) 处理结果

Fig. 7 Image inpainting experiment II. (a)Original image; (b)Damaged image; (c)Result using our algorithm



图 8 图像修补实验 III。(a) 原始图像；(b) 缺损图像；(c) 处理结果

Fig. 8 Image inpainting experiment III. (a) Damaged image; (b) Original image; (c) Result using our algorithm

#### 4 结论

空域中图像修补方法日趋成熟，而小波图像修补问题一直以来是在小波域进行的。本文提出一种思想：在空域中修补丢失小波系数的缺损图像，以达到恢复丢失系数或者取得良好视觉效果。文章提出一种基于 ROF 模型的实现以上思想的修补方法，并设计了具体算法。实验结果表明，该方法可以得到较好的修补效果，在空域实现了小波图像修补，因而本文提出的思想是可行的。对于纹理及细节部分的修补仍旧是修补研究的重点，修补算法的实现效率也有待于提高。

#### 参考文献：

- [1] Li Xin, Zhao Yigong, Chen Bing. A New Approach of Small and Dim Target Detection in Cloud Cluster Infrared Image Based on Classification[J]. 光学学报, 2009, 29(11): 3036~3042 (in chinese)  
李欣, 赵亦工, 陈冰. 基于分类的红外云层背景弱小目标检测方法[J]. 光学学报, 2009, 29(11): 3036~3042
- [2] Hao Zhicheng, Wu Chuan. Moving Object Detection from Dynamic Image Sequence Based on Stability Matrix[J]. 光学学报, 2009, 29(11): 3031~3035 (in chinese)  
郝志成, 吴川. 基于稳定矩阵的动态图像运动目标检测[J]. 光学学报, 2009, 29(11): 3031~3035
- [3] M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles and C. Ballester. Image Inpainting[J]. Proceedings of SIGGRAPH 2000, New Orleans, USA, July 2000
- [4] T F Chan, J Shen. Non-Texture Inpainting by Curvature-Driven Diffusion(CDD)[J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2001, 12: 436~449
- [5] Tao Xiaoping, Feng Huajun, Zhao Jufeng, Li Qi, Xu Zhihai. A Total-Variation Majorization-Minimization Sectioned Restoration Algorithm with Gradient Ringing Metric Image Quality Assessment[J]. 光学学报, 2009, 29(11): 3025~3030 (in chinese)  
陶小平, 冯华君, 赵巨峰, 李奇, 徐之海. 结合基于梯度的振铃评价算法的总变分最小化图像分块复原法[J]. 光学学报, 2009, 29(11): 3025~3030
- [6] L. Rudin, S. Osher and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, 69: 259~268
- [7] T F Chan, S H Kang, J H Shen. Euler's elastica and curvature based inpainting[J]. SIAM Journal of Applied Mathematics, 2002, 63 (2) : 564~592
- [8] Tsai A, Yezzi J A, Willsky A S. Curve evolution implementation of the Mumford-Shah functional for image segmentation, denoising, interpolation and magnification[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10 (8) :



1169~ 1186

- [9] Esedoglu S, Shen J H. Digital inpainting based on the Mumford-Shah-Euler image model[J]. *European Journal on Applied Mathematics*, 2002, 13 (4) : 353~ 370
- [10] Zhang Hongyin, Peng Qicong. A Survey on Digital Image Inpainting[J]. *A Journal of Image and Graphics*, 2007,12(1):1~10(in chinese)  
张红英, 彭启琮. 数字图像修复技术综述[J]. *中国图象图形学报*, 2007,12(1): 1~10
- [11] Guo Yongcai, Gao Chao, Wang Enuo. Blind Image Restoration Algorithm Based on Wavelet Transform and NAS-RIF Algorithm[J]. *光学学报*, 2009, 29(11): 3000~3003 (in chinese)  
郭永彩, 高潮, 王婀娜. 基于小波变换和非负支撑域递归逆滤波算法的盲目图像复原[J]. *光学学报*, 2009, 29 (11): 3000~3003
- [12] Wim Sweldens. Wavelet, Signal compression and image processing[C]. *ACM SICCRAPH94*, 1994
- [13] LI Min FENG, Xiang-chu. A denoising model using the total variation and wavelet method[J]. *Journal of Xidian University*, 2006, 33(6) (in chinese)  
李敏, 冯象初. 基于全变差和小波方法的图像去噪模型[J]. *西安电子科技大学学报(自然科学版)*. 2006, 33(6)
- [14] L. Zhang, B. Paul, et al, Threshold analysis in wavelet-based denoising[J]. *Electronics Letters*, 2001, 9(37) : 1485~ 1486
- [15] Chan Tony, Shen Jianhong, Zhou Hao-Min. Total variation wavelet inpainting[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*[J]. 2006 , 25: 107~ 125(19)
- [16] Xiaoqun Zhang, Tony F. Chan. Wavelet Inpainting by Nonlocal Total Variation[J]. *Inverse Problems and Imaging*, 2010, 2 (4): 191~210
- [17] L. Rudin, S. Osher and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica D*, 1992, 69: 259~ 268