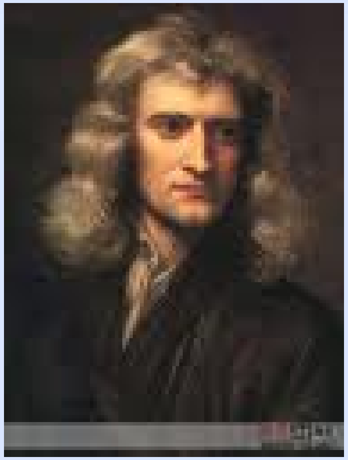
论由Dirac符号组成的算符之积分及应用

——牛顿-莱布尼兹积分的新方向

范 洪 义

物理系 2010学术大会

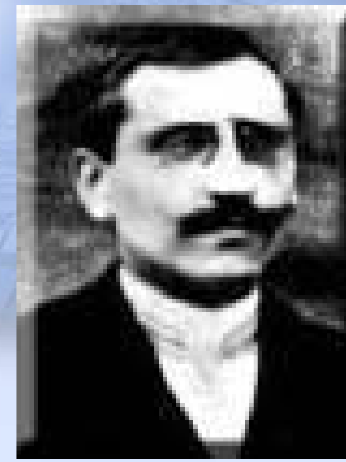


Newton
1643—1727

Leibniz
1646—1716

Poisson
1781—1840

Cauchy
1789-1857



Lebesgue
1875—1941

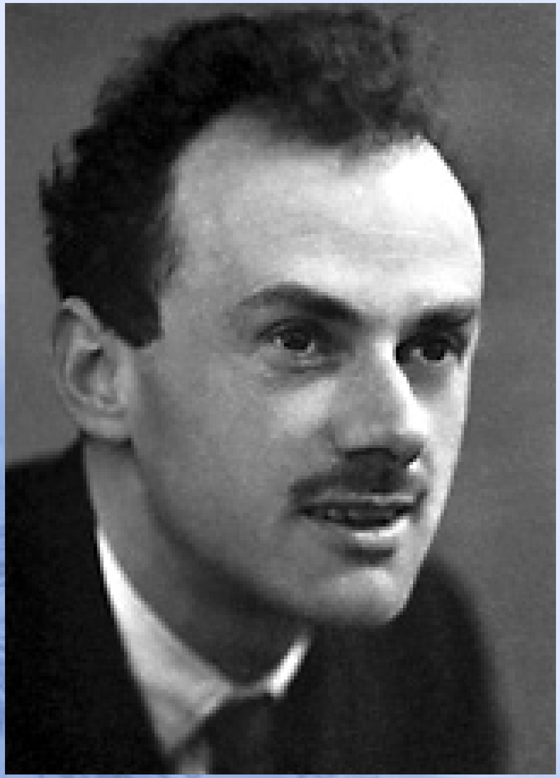
Poisson 是把微积分引入复平面的第一人。

牛顿-莱布尼兹积分 —发展方向→

- ①复变函数积分（泊松积分、柯西定理）
- ②实变函数积分（勒贝格积分）
- ③**Dirac**符号积分**(1966年想到此课题，到1980年初步完成)**

Dirac的期望

Dirac 符号法是量子力学的语言，涵盖了Heisenberg 和 Schrodinger表述。



P.A.M. Dirac. （1902—1984）

Dirac: "The symbolic method, however, seems to go more deeply into the nature of things. It enables one to express the physical laws in a neat and concise way, and will probably be increasingly used in the future as it becomes better understood and its own special mathematics gets developed."

- ***"This work gave me more pleasure in carrying it through than any of the other papers which I have written on quantum mechanics either before or after."***

- ***“I think that is the piece of work which has most pleased me of all the works that I’ve done in my life… The transformation theory (become) my darling.”***

有序算符内的积分技术 （IWOP）

➢如何发展Dirac符号的特殊数学

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq \left|q\right\rangle\left\langle q\right| = 1$$

$$\boxed{S_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \left|\frac{q}{2}\right\rangle\left\langle q\right| = ??}$$

困难：由于算符|><|包含不对易成分，故对经典c数函数有效的牛顿－莱布尼兹积分规则不能直接应用到由Dirac符号组成的算符(q数)积分。又如:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq \left|f(q)\right\rangle\left\langle q\right| = ?? \quad U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \left|q,t\right\rangle\left\langle q,0\right| = ??$$

普适性：所有的多模连续表象都存在这样的积分。

➢正规乘积性质（以: :标记）

$$f\left(a,a^{+}\right)=\sum_{j}\dots\sum_{m}a^{+j}a^{k}a^{+l}\dots a^{m}f\left(j,k,l,\dots,m\right)$$

i) 在正规乘积内部玻色子算符相互对易。

$$:a^{\dagger}a:=:aa^{\dagger}:=a^{\dagger}a$$

ii) C数可以自由出入正规乘积记号。

iii) 对正规乘积内的**C**数进行积分或微分运算，前者要求积分收敛。

iv)正规乘积内的正规乘积记号可以取消。

v)真空投影算符**|0⟩⟨0|**的正规乘积展开式

$$|0\rangle\langle 0|=:\exp(-a^{\dagger}a):.$$

➢正规乘积内的积分技术 $(令\hbar = m = \omega = 1)$

$$\hat{Q}|q\rangle = q|q\rangle, \qquad \hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger), \quad |q\rangle = \pi^{-1/4} e^{-\frac{1}{2}q^2 + \sqrt{2}qa^+ - \frac{1}{2}a^{+2}} |0\rangle$$

$$S_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{\sqrt{\mu}} \left| \frac{q}{\mu} \right\rangle \langle q|$$

量子光学的单模压缩算符。

$$= \operatorname{sec} h^{1/2}\lambda : e^{-\frac{a^{+2}}{2}\tanh\lambda + (\operatorname{sec} h\lambda - 1)a^+ a + \frac{a^2}{2}\tanh\lambda} :$$

$$= e^{-\frac{a^{+2}}{2}\tanh\lambda} e^{(a^+ a + \frac{1}{2})\ln \operatorname{sec} h\lambda} e^{\frac{a^2}{2}\tanh\lambda} \qquad (\mu = e^\lambda)$$

注意： $e^{\lambda a^\dagger a} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda n} |n\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda n} \frac{a^{\dagger n}}{n!} : e^{-a^\dagger a} : a^n =: e^{(e^\lambda - 1)a^\dagger a} :$

正规乘积内的积分技术只是IWOP技术的一种， IWOP技术包括反正规乘积、Weyl编序乘积、S-编序乘积内的积分技术等。

➢IWOP技术改写常见表象的完备性

坐标表象

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq|q\rangle\langle q| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{\sqrt{\pi}} :e^{-(q-\hat{Q})^2}: = 1$$

动量表象

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp|p\rangle\langle p| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{\pi}} :e^{-(p-\hat{P})^2}: = 1$$

相干态表象

$$\int \frac{d^2 z}{\pi}|z\rangle\langle z| = \int \frac{d^2 z}{\pi} :e^{-(z^*-a^+)(z-a)}: = 1$$

纯Gauss型积分形式，其有何物理应用？
如可以发展量子相空间理论等

Wigner算符的正规乘积形式

从上面的Guass积分形式，可以引入 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(q+ip)$

$$\Delta(q,p)=\frac{1}{\pi}:e^{-(p-P)^2-(q-Q)^2}:=\frac{1}{\pi}:e^{-2(\alpha^*-a^+)(\alpha-a)}:$$

其边缘分布

$$\int_{-\infty}^{\infty}dp\Delta(q,p)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}:e^{-(q-Q)^2}:=|q\rangle\langle q|$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}dq\Delta(q,p)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}:e^{-(p-P)^2}:=|p\rangle\langle p|$$

所以，$\Delta(q,p)$就是Wigner算符。

Wigner算符的新形式

根据上面的**Wigner**算符的边缘分布，得其完备关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} dqdp\Delta(q,p) = \int_{-\infty}^{\infty} dp|p\rangle\langle p| = 1$$

任意算符可用$\Delta(q,p)$展开

$$F(\hat{Q},\hat{P}) = \int_{-\infty}^{\infty} dqdpf(q,p)\Delta(q,p)$$

由于其积分核是$\Delta(q,p)$，故此式称为**Weyl对应**。

由上式可知 $q^m p^n$ 的量子化算符为

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \hat{Q}^{m-l}\hat{P}^n\hat{Q}^l = \int_{-\infty}^{\infty} dqdp q^m p^n \Delta(q,p)$$

左边正好是**Weyl**引入的编序，我引入记号$\vdots\quad\vdots$来表示。

所以，左边可加$\vdots\quad\vdots$，在其内部 $\hat{Q}$ 与 $\hat{P}$ 对易，故有

$$\vdots\,\hat{Q}^m\hat{P}^n\,\vdots = \int_{-\infty}^{\infty} dqdp q^m p^n \Delta(q,p)$$

因此引入$\vdots\quad\vdots$记号后，发现**Wigner**算符的**Weyl**编序形式为

$$\Delta(q,p) = \vdots\,\delta(q-\hat{Q})\delta(p-\hat{P})\,\vdots$$

相空间中的范氏变换

在数理方程理论中，我曾引入一种新变换

$$\iint \frac{dpdq}{2\pi} f(q,p) e^{2i(q-x)(p-y)} \equiv F(x,y)$$

其逆变换

$$\iint \frac{dxdy}{2\pi} F(x,y) e^{-2i(q-x)(p-y)} = f(q,p)$$

此变换保持模不变，其应用可把**Chirplet(啁秋波)**转变为光学分数傅立叶变换核。也首次得到**Weyl**编序算符与$\hat{P} \leftrightarrow \hat{Q} \quad \left(\hat{Q} \leftrightarrow \hat{P}\right)$编序之间的互变公式

$$\frac{1}{\pi} \iint dxdy \Delta(q,p) e^{2i(q-x)(p-y)} = \delta\left(q-\hat{Q}\right)\delta\left(p-\hat{P}\right)$$

$$\frac{1}{\pi} \iint dxdy \Delta(q,p) e^{-2i(q-x)(p-y)} = \delta\left(p-\hat{P}\right)\delta\left(q-\hat{Q}\right)$$

Radon变换与中介表象

$$|x\rangle_{\lambda,\nu\,\lambda,\nu}\langle x| = \int_{-\infty}^{+\infty} dq' dp' \delta(x-\lambda q'-\nu p')\Delta(q,p)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(\lambda^2+\nu^2)}} : \exp\left(-\frac{\left[x-(\lambda\hat{Q}+\nu\hat{P})\right]^2}{\lambda^2+\nu^2}\right):$$

$$|x\rangle_{\lambda,\nu} = \left[\pi(\lambda^2+\nu^2)\right]^{-1/4} \exp\left[-\frac{x^2}{2(\lambda^2+\nu^2)} + \frac{\sqrt{2}xa^+}{\lambda-i\nu} - \frac{\lambda+i\nu}{2(\lambda-i\nu)}a^{+2}\right]|0\rangle$$

此就被称为中介表象，满足本征方程

$$(\lambda\hat{Q}+\nu\hat{P})|x\rangle_{\lambda,\nu} = x|x\rangle_{\lambda,\nu}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle_{\lambda,\nu\,\lambda,\nu}\langle x| = 1$$

光学Fresnel变换与量子力学tomography

➤**Fresnel算符**

相干态表象

$$F(s,r)=\sqrt{s}\int\frac{d^2z}{\pi}\left|\begin{pmatrix} s & -r \\ -r^* & s^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ z^* \end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix} z \\ z^* \end{pmatrix}\right| \qquad (|s|^2-|r|^2=1)$$

$$=\exp\left(-\frac{r}{2s^*}a^{+2}\right)\exp\left[(a^+a+\frac{1}{2})\ln\frac{1}{s^*}\right]\exp\left(\frac{r^*}{2s^*}a^2\right)$$

在坐标表象中的矩阵元 $AD-BC=1$

$$\langle q'|F(r,s)|q\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi iB}}\exp\left[\frac{i}{2B}\left(Aq'^2-2q'q+Dq^2\right)\right]$$

——这正是光学**Fresnel**变换的积分核

这里 $D=\frac{1}{2}\left[s+s^*+r+r^*\right],\qquad B=\frac{1}{2i}\left[s-s^*+r^*-r\right]$

➢Fresnel算符的群乘法规则

$$\begin{pmatrix} s'' & -r'' \\ -r''^* & s''^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -r \\ -r^* & s^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s' & -r' \\ -r'^* & s'^* \end{pmatrix}$$

$$F(s'',r'') = F(s,r)F(s',r')$$

➢光学Fresnel变换与量子力学tomography

$$F\left|x\right\rangle\left\langle x\right|F^{+} = \left|x\right\rangle_{s,r\,r,s}\left\langle x\right|$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dq'dp'\delta\left[x-\left(Dq'-Bp'\right)\right]\Delta(q',p')$$

Fan HY and Hu LY, Opt. Commun. 282 (2009) 3734–3736

量子光学中的ABCD定理

正则相干态表象

$$F(A,B,C)=\int_{-\infty}^{+\infty}dqdp\left|\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}\right|$$

$(AD-BC=1)$

$$=\exp\left(\frac{iC}{2A}\hat{Q}^2\right)\exp\left[-\frac{i}{2}(\hat{Q}\hat{P}+\hat{P}\hat{Q})\ln A\right]\exp\left(-\frac{iB}{2A}\hat{P}^2\right)$$

将**F(A,B,C)**作用于**|0⟩**，有

$$F(A,B,C)\left|0\right\rangle=\sqrt{-\frac{2/(C+iD)}{\rho_1+i}}\exp\left[\frac{\rho_1-i}{2(\rho_1+i)}a^{+2}\right]\left|0\right\rangle$$

其中

$$\rho_1\equiv-\frac{A+iB}{C+iD}$$

将$F(A,B,C)|0\rangle$为一矩阵$[A',B',C',D']$光学系统的输入态，则系统输出态为

$$F(A',B',C')F(A,B,C)\left|0\right\rangle = \sqrt{\frac{-2/(C''+iD'')}{\rho_2+i}}\exp\left[\frac{\rho_2-i}{2(\rho_2+i)}a^{+2}\right]\left|0\right\rangle$$

式中

$$\rho_2 \equiv -\frac{A''+iB''}{C''+iD''}$$

$$\begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Fan HY, Lu HL, Gao WB, et. al., Ann. Phys. 321 (2006) 2116

纠缠态表象

- 1935年， Einstein，Podolsky和Rosen（EPR）联名发表了一篇关于EPR佯谬的著名论文。

EPR纠缠态是两粒子相对坐标Q1-Q2和总动量P1+P2的共同本征态

$$\left|\eta\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2 + \eta a_1^+ - \eta^* a_2^+ + a_1^+ a_2^+} \left|00\right\rangle, \qquad \eta = \eta_1 + i\eta_2$$

$$\left(\hat{Q}_1 - \hat{Q}_2\right)\left|\eta\right\rangle = \sqrt{2}\eta_1\left|\eta\right\rangle$$

$$\left(\hat{P}_1 + \hat{P}_2\right)\left|\eta\right\rangle = \sqrt{2}\eta_2\left|\eta\right\rangle$$

➢完备性与正交性

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^2\eta}{\pi}|\eta\rangle\langle\eta|=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^2\eta}{\pi}:e^{-(\eta^*-a_1^++a_2)(\eta-a_1+a_2^+)}:=1$$

$$\langle\eta'|\eta\rangle=\pi\delta^{(2)}(\eta'-\eta)$$

基于**EPR**的量子纠缠思想，建立与发展两粒子和多粒子连续纠缠态表象，并给出其产生机制及其广泛应用。

➢双模压缩算符的自然表象

$$S_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^2\eta}{\sqrt{\mu}}\left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle\langle\eta|$$

$$=\operatorname{sec}h\lambda:e^{a_1^+a_2^+\tanh\lambda+(\operatorname{sec}h\lambda-1)(a_1^+a_1+a_2^+a_2)-a_1a_2\tanh\lambda}:$$

$$=e^{a_1^+a_2^+\tanh\lambda}e^{(a_1^+a_1+a_2^+a_2+1)\ln\operatorname{sec}h\lambda}e^{-a_1a_2\tanh\lambda}\qquad(\mu=e^\lambda)$$

发展小波变换理论

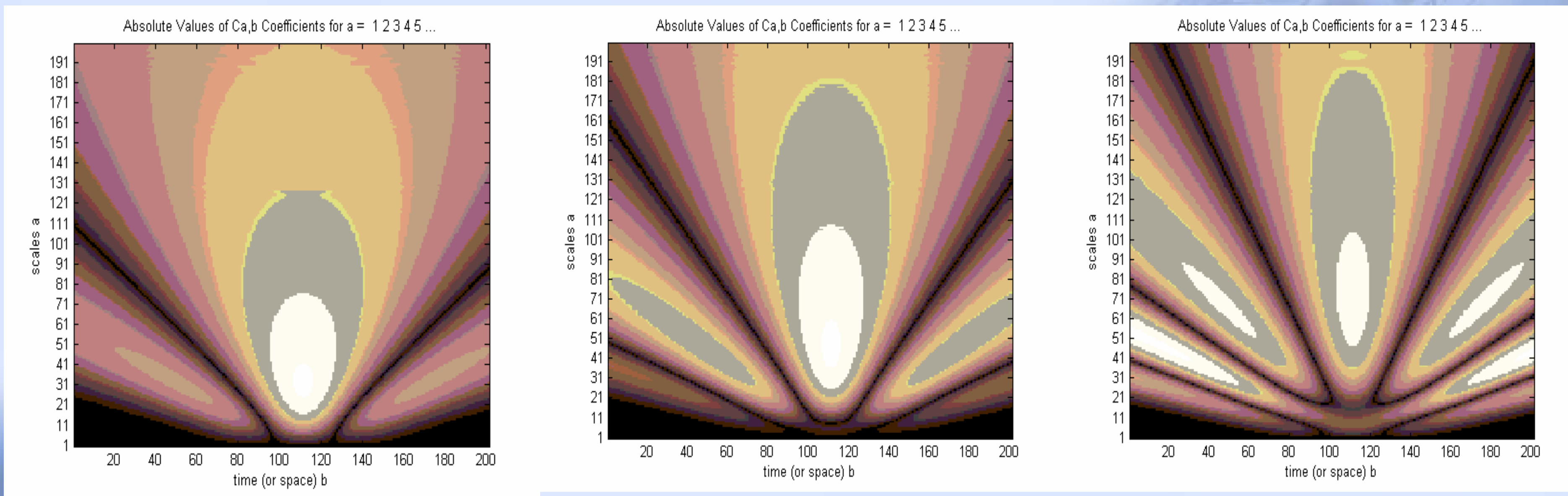
$$
U=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int dx\left|\frac{x-s}{\mu}\right\rangle\left\langle x\right|
$$

- 从量子角度发现寻找母小波的新途径,并给出大量新的母小波（**H-G wavelets**，**L-G wavelets)**。在光学图象处理上将会有广泛的应用。

- 提出经典中没有的辛**(symplectic)**小波变换和纠缠辛小波变换;其应用有待于进一步研究。

Fan HY and Lu HL, *Opt. Lett.* 31 (2006) 3432
Fan HY, Liu SG and Hu LY, *Opt. Lett.* 43 (2009) 551

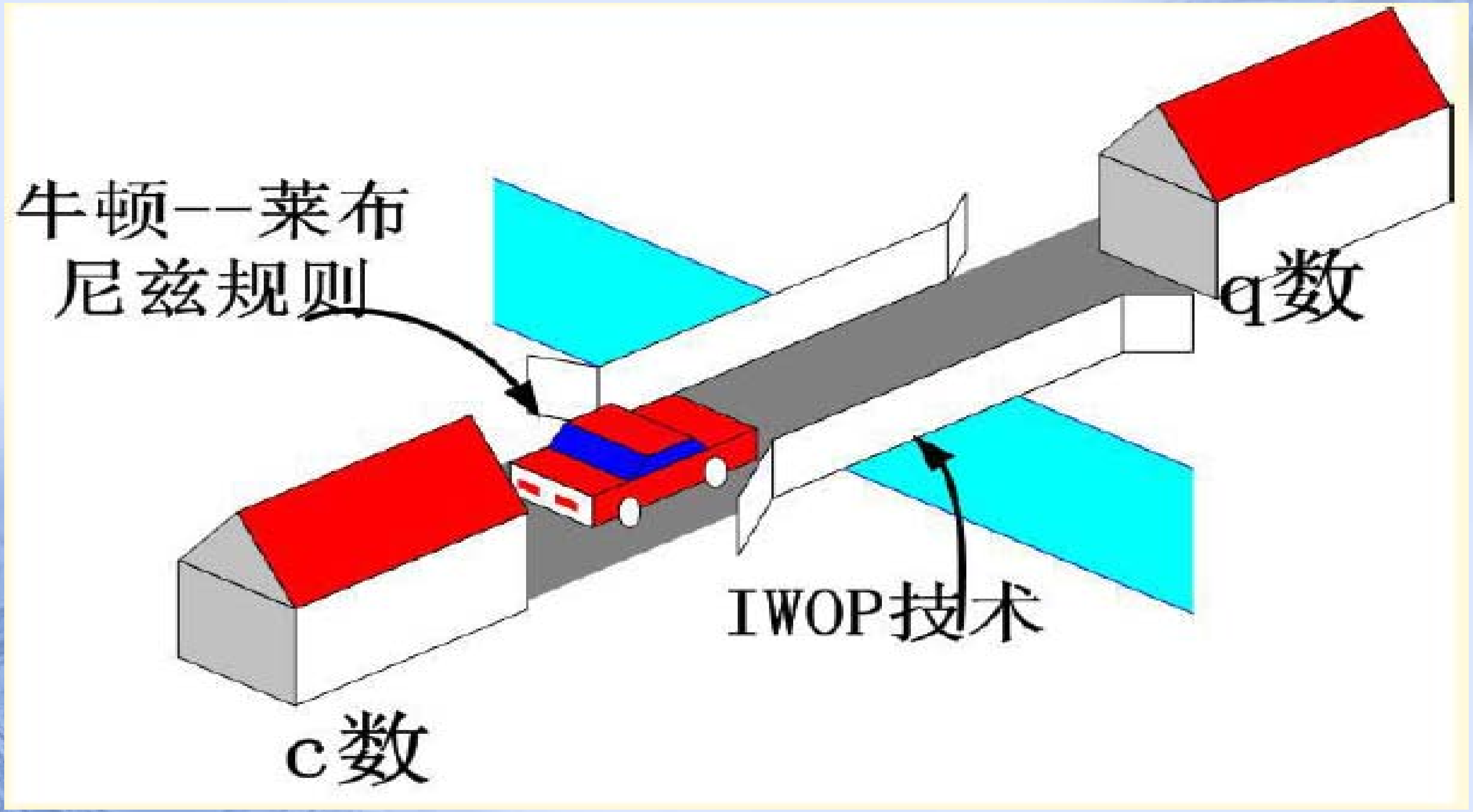
➢新的母小波



与通常情况相比，除了一个极大外，还有多个次极大，这就使得对信号作小波变换时检测到微弱信号的机会增加。

Fan HY and Lu HL, *Opt. Lett.* 31 (2006) 407

IWOP技术的作用



对Dirac符号积分的成功带来的好处

- 给出了经典变换到量子幺正变换算符的捷径，可以发现很多新的幺正算符，为量子调控提供新思路。
- 在不能用群论的地方发挥作用。
- 从纯数学的观点看，可以简捷地导出很多新积分公式。
- 用不同的算符编序方案，对同一个积分的结果表现形式不同，适用于计算不同的物理量。
- 可以找到很多新的有用量子力学表象，有利于求解很多动力学方程，尤其是连续变量的纠缠态表象可以阐述很多物理问题。
- 可以发现很多新的有望可物理制备的有特殊物性的量子态。
- 揭示量子力学深层次美感。
- 降低人们对量子力学数学物理的神秘感和抽象感。
- 有效地发展了量子光学理论。
- 丰富和发展了量子相空间理论与量子**Tomography**。

- " It joints the two formalism (integral representation and operators) in a very clever way. The IWOP technique should be widely known."
- "I believe it will be rather useful for many PhD students as well as researchers working in the field of quantum optics."

谢谢各位！