

这样的 $\hat{\beta}_n$ 一定存在, 就以它作为 β 的估计. 寻求这样的 $\hat{\beta}_n$, 正是计算数学中的 Chebyshev 逼近问题的离散情况. E. Stiefel 发现了用线性规划解这个问题的方法(参见[1], 或[2]的第8页).

本文研究此方法的统计性质, 得到了

定理 1 在关于 $\{e_i\}$ 的上述假定之下, 若 $\{x_i\}$ 为有界点列, 且对任何非零向量 d , $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i' d$ 不存在, 则 $\hat{\beta}_n$ 为 β 的强相合估计, 即 $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta}_n = \beta) = 1$.

我们进一步证明了, 在定理 1 中关于 $\{e_i\}$ 为 iid 的假定可以大大放宽, 因而容许 $\{e_i\}$ 为相依. 我们特别对 $\{e_i\}$ 为 m 相依及 $\{e_i\}$ 为强平稳的情况作了讨论. 在传统的最小二乘法中, 当误差序列 $\{e_i\}$ 为相依时, 处理相合性的问题要困难得多.

我们也讨论了 $\hat{\beta}_n$ 的均方相合性, 得到

定理 2 在定理 1 的条件下, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\|\hat{\beta}_n - \beta\|^2) = 0$.

同样, 关于 $\{e_i\}$ 为 iid 的假定可以大大放宽.

再考虑估计 e_i 的散布度的问题. 以 σ^2 记误差方差 $\text{Var}(e_i)$, 并以

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - x_i' \hat{\beta}_n)^2$$

作为 σ^2 的估计, 则有

定理 3 在定理 1 的条件下, 并假设 $Ee_i^4 = 0$, 则 $\hat{\sigma}_n^2$ 为 σ^2 的强相合估计.

在 e_i 的支撑有界的假定下, 支撑集的上、下确界 a_2 与 a_1 之差 $a_2 - a_1$ 是 e_i 的散布度的一个合适的指标. 用

$$\hat{a}_{1n} = \min_{1 \leq i \leq n} (y_i - x_i' \hat{\beta}_n), \quad \hat{a}_{2n} = \max_{1 \leq i \leq n} (y_i - x_i' \hat{\beta}_n)$$

分别作为 a_1 和 a_2 的估计, 并以 $\hat{a}_{2n} - \hat{a}_{1n}$ 估计 $a_2 - a_1$, 则有

定理 4 在定理 1 的条件下, $\hat{a}_{2n} - \hat{a}_{1n}$ 为 $a_2 - a_1$ 的强相合估计.

[1] Stiefel E., *An Introduction to Numerical Mathematics*, Academic Press (1963)

[2] Franklin J., *Methods of Mathematical Economics*, Springer-Verlag (1980)

(1984年8月28日收到)

等离子体鞘层中共存三条通向混沌的道路

方锦清 陶刘来

(中国原子能科学研究院)

在许多等离子体装置(如等离子体离子源等)中, 等离子体几乎都受到一定周期外力(如正弦信号)的作用. 为此, 我们在过去研究无外力下等离子体鞘层的物理模型的基础上^[1], 进一步考虑了这个重要因素. 这时, 在周期外力驱动下归一化的等离子体鞘层演化方程变为(有关符号见文[1])

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = Z[(1+A\eta)^{-1/2} - \exp(-\eta) \\ \quad + C \cos(\omega t)], \\ \dot{\eta} = Z\zeta, \quad \dot{\xi} = Z, \quad \dot{Z} = \zeta. \end{cases} \quad (1)$$

对此方程, 采用五种方法进行计算机数值模拟^[2], 详细研究了等离子体鞘层的演化特性, 即普适不稳定性(包括各种振荡特性、分岔和

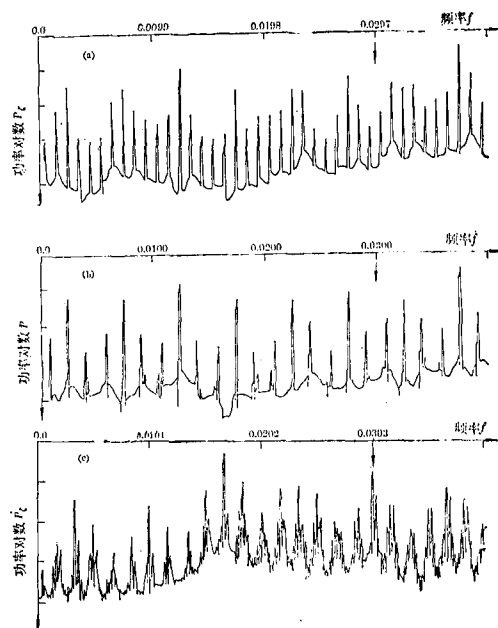


图 1 从周期、准周期通向混沌

(a) $\omega = 0.0622$ } $A = 3.437,$
 (b) $\omega = 0.0630$ } $C = 0.005.$
 (c) $\omega = 0.0632$

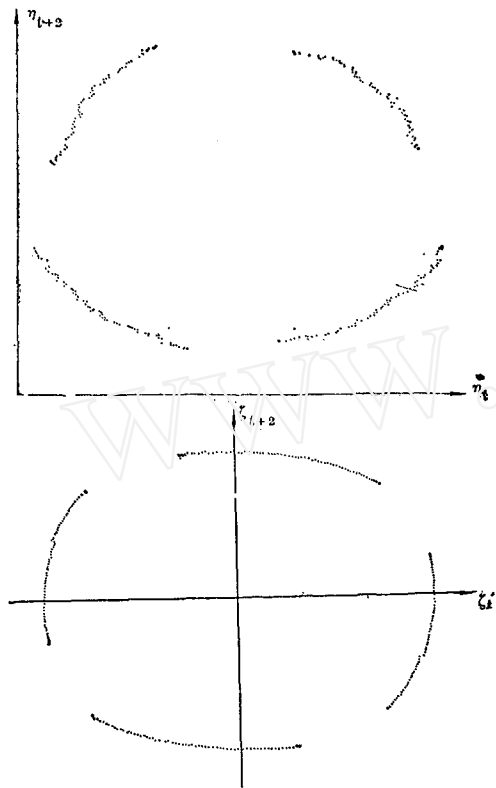


图 2 彭加勒映象
 $A=3.437, C=0.005, \omega=0.561.$

混沌)。

令人感兴趣的主要结果是, 本物理数学模型同时共存迄今熟知的三条通向混沌的道路, 它们与控制参数 A, C 和 ω 有密切关系。这是在强迫振荡下布鲁塞尔模型中首例观察到共存三条通向混沌的道路^[3]的又一典型实例。这三条道路是: (1) 从周期态-准周期态通向混沌。只要固定 A, C 和 ω 中的任意两个而改变第三个, 则可广泛观察到鞘层中存在这种转变序列, 其功率谱如图 1 所示。(2) 从倍周期分岔走向混沌。图 1(a) 即倍周期分岔。当固定 A 和 C 而改变 ω , 且 ω 在大范围内变化时, 观察到 $m \cdot 2^n$ ($m=3, 5, 7, 9, \dots; n=1, 2, 3, 4, \dots$) 倍周期分岔通向混沌的序列。(3) 阵发混沌。特点是在周期态或准周期态的背景上间歇地爆发混沌态, 本模型中后者更为突出。因篇幅有限, (2)、(3) 两种序列的功率谱将另文详讨。

迄今, 在理论上第一条道路尚不如后两条

道路研究得清楚。我们所做的彭加勒映象的结果表明(见图 2): 当控制参量变化时, 由于准周期轨道几乎处处失去光滑性, 或者局部失去光滑性, 或者不同参量空间中两种情况均有, 所以上述任一情况都会导致运动失稳而进入混沌——奇异吸引子。这一结果证实并补充了以往文献关于从准周期态向混沌过渡的基本物理图象。同时符合 Fuelle、Takens 关于从准周期态通向混沌的序列至多只有三个不可比频率的论断^[4]。

在不同的实验条件和装置下, 人们可以观测到通向混沌的不同道路。而每条道路只反映等离子体行为复杂性的某个侧面。这表明等离子体不稳定性发生的机制是多方面的

金星南教授审阅了本文, 作者谨致谢意。

- [1] 方锦清, 《原子核物理》, 2(1980)175
- [2] 郝柏林, 《物理学进展》, 3(1983)335
- [3] 王光瑞, 郝柏林, 《物理学报》, 33(1984)3321
- [4] Ruelle D., Takens F., *Commun. Math. Phys.*, 20(1971) 167

(1985年 2 月 15 日收到)

环形腔光学双稳性 临界合作参量的数值计算

宋如华

(成都电讯工程学院)

充以非线性介质的光学环形腔, 光学双稳性的临界合作参量, 在平均场近似下的结果为^[1]

$$C_{\lambda} = 4$$

本文根据环形腔的输入-输出光场的特性关系^[2]

$$\ln \left[1 + T \left(\frac{y}{x} - 1 \right) \right] + \frac{x^2}{2} \left\{ \left[1 + T \left(\frac{y}{x} - 1 \right) \right]^2 - 1 \right\} = \alpha_{ab} L,$$

其中 x, y 分别为归一化输出、输入光场振幅, T 为半反射镜的透射率, L 为充有非线性介质的腔长, α_{ab} 为介质的线性吸收系数, 通过数值计算、筛选, 最后得到在不同的透射率下的